# Formules des projections

Daniel Ramos
IMAGINARY

Mathématiquement, une projection cartographique est simplement une transformation de la sphère dans le plan, c'est à dire, une fonction qui prend des coordonnés géographiques de longitude et latitude, $(\lambda, \phi)$, et donne les coordonnées cartésiennes du plan, $(x, y)$.

Pour la projection de plate-carrée, cette transformation est simplement

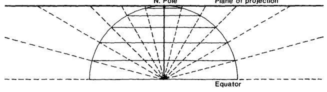
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & \phi \end{array} \right.$$

ou, si nous voulons y considérer l'échelle,

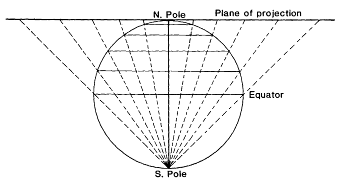
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & R\,\lambda \\ y & = & R\,\phi \end{array} \right.$$

où $R$ est le rayon de la sphère à l'échelle de la projection.

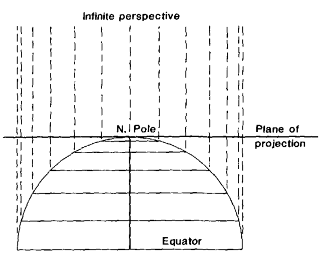
En général, la transformation est plus compliquée. Pour certaines projections comme la gnomonique, stéréographique ou orthographique, il y a une méthode géométrique (cette perspective ou source lumineuse) pour déterminer les coordonnées de la projection d'un point de la sphère.



P. gnomonique



P. stéréographique



P. orthographique

C'est un exercice intéressant obtenir les formules à partir de ces diagrammes, qui ne demande que la géométrie analytique du lycée. On peut trouver la solution dans la liste de formules plus en bas.

Pour d'autres projections, il y a une formule, mais elle ne s'obtient pas par une procédure géométrique visuelle. Par exemple, la projection de Mercator a comme formules

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& R\,\lambda \\ y &=& R\,\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})) \end{array} \right.$$

et pour d'autres projections, les formules sont données en forme implicite ou par une procédure numérique, comme par exemple la projection de Mollweide.

La question de fond est que pour comprendre la géométrie d'une carte, la formule concrète n'est pas le plus important. Il n'est pas si important que la projection de Mercator utilise un logarithme de la tangente, comme le fait que cette formule est la réponse au besoin que la carte soit conforme. En fait, Mercator lui-même a dessiné sa carte heuristiquement en 1569, des dizaines d'années avant que le mathématicien John Napier ait décrit les logarithmes pour la première fois, en 1614.

# Formules

Les formules suivants sont les transformations associées aux projections expliquées dans la vidéo et disponibles sur [1]. Le lecteur intéressé peut trouver des explications plus détaillées sur [3], et aussi une liste exhaustive sur [2]. S'il est intéressé par l'implementation pratique, en langage informatique, il peut la trouver sur [4].

Les symbols utilisées sont :

$$\begin{array}{lcl} \lambda &=& \text{longitude (radians)} \\ \phi &=& \text{latitude (radians)} \\ R &=& \text{rayon de la sphère} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} x &=& \text{coordonnée horizontale} \\ y &=& \text{coordonnée verticale} \end{array}$$

Changer l'aspect d'une carte implique changer sa formule de transformation. Ici nous listons les formules pour les projections plate-carrée, Mercator, Gall-Peters et Mollweide en aspect équatorial, centrées à 0°N 0°W ; et les projections azimuthale équidistante, gnomonique, stéréographique et orthographique en aspect polaire, centrées au pôle nord ; même si dans la vidéo ces dernières projections sont montrées en aspect oblique, centrées aux coordonnées de Paris.

### Projection plate-carrée ou équirectangulaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& R\,\lambda \\ y &=& R\,\phi \end{array} \right.$$

**Projection de Mercator**

$$\begin{cases} x &= R\,\lambda \\ y &= R\,\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})) \end{cases}$$

**Projection de Gall-Peters**

$$\begin{cases} x &= R\,\lambda \\ y &= 2\,R\,\sin(\phi) \end{cases}$$

**Projection de Mollweide**

Pour chaque $\phi$, trouver $\Theta$ qui satisfait l'equation implicite

$$2\Theta + \sin(2\Theta) = \pi \sin(\phi)$$

en utilisant la méthode itérative de Newton-Raphson avec $\phi/2$ comme estimation initiale de $\Theta$. Alors

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\pi}2\sqrt{2}R\lambda\cos(\Theta) \\ y &= \sqrt{2}R\sin(\Theta) \end{cases}$$

**Projection de Postel ou azimuthale équidistante**

$$\begin{cases} x &= R\,(\frac{\pi}{2}-\phi)\sin(\lambda) \\ y &= -R\,(\frac{\pi}{2}-\phi)\cos(\lambda) \end{cases}$$

**Projection gnomonique**

Seulement valable pour $\phi > 0$,

$$\begin{cases} x &= R\,\cot(\phi)\sin(\lambda) \\ y &= -R\,\cot(\phi)\cos(\lambda) \end{cases}$$

**Projection stéréographique**

Seulement valable pour $\phi \neq -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x &= 2R\,\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2})\sin(\lambda) \\ y &= -2R\,\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2})\cos(\lambda) \end{cases}$$

### Projection orthographique

Seulement valable pour $\phi \geq 0$,

$$\begin{cases} x &= R\ \cos(\phi)\sin(\lambda) \\ y &= -R\ \cos(\phi)\cos(\lambda) \end{cases}$$

## Références


[1] *Mappae Mundi* (logiciel web interactif)
Daniel Ramos
https://imaginary.org/fr/program/mappae-mundi

[2] *An album of map projections*
John P. Snyder and Philip M. Voxland. U.S. Geological Survey Professional Paper 1453
https://doi.org/10.3133/pp1453

[3] *Map projections : A working manual*
John P. Snyder. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395
https://doi.org/10.3133/pp1395

[4] *D3-geo and D3-geo-projection* (bibliothèque JavaScript)
Mike Bostock and contributors
https://github.com/d3/d3-geo-projection