

# Cartes de la Terre

Daniel Ramos  
IMAGINARY

Voici un globe terrestre. C'est une boule de 20 cm de diamètre, ce qui signifie que c'est à peu près soixante quatre millions de fois plus petit que la vraie planète Terre. C'est un modèle de la Terre à échelle réduite.

Si nous voulons une carte à l'échelle d'un continent, on peut couper un morceau de la boule comme ici, ces pièces sont des modèles à l'échelle des continents: Afrique, Amérique du Nord, Europe et Asie...

Mais ni la boule ni ces coquilles ne sont pratiques à transporter, à dessiner, ou à mesurer, car ce sont des pièces tridimensionnelles. C'est pour cela que nous utilisons des cartes. Une carte de la Terre est une représentation graphique de la planète tridimensionnelle, sur un plan bidimensionnel. Nous sommes très habitués à voir et utiliser des cartes. Prenons quelques exemples:

Pourquoi il y a plusieurs types de cartes? Chacune utilise une méthode différente pour représenter la Terre, cette méthode c'est ce que nous appelons **projection**. Est-ce qu'une carte est une représentation parfaitement fidèle de la réalité? Non, mais ce n'est pas le but. Par exemple, il est impossible de voir tous les points de la Terre en même temps, il faut tourner la boule pour avoir différents points de vue. Mais avec une carte comme celle-là, nous pouvons voir tous les lieux de la Terre à un coup d'oeil.

En faisant cela, nous avons distordu les formes et distances de la Terre. Est-ce que cette carte est un modèle à l'échelle réduite? Pas du tout! Il y a des pays qui sont plus déformés que d'autres, ou plus déformés dans une direction que dans une autre. Si vous voulez, pensez que si cette carte du monde était à l'échelle réduite, cela voudrait dire que la terre serait un énorme rectangle plat qui flotterait dans l'espace.

Alors, comment construire une carte, et comment mesurer la déformation?

## Projection Plate Carrée

Commençons par la projection la plus simple possible, dite **Plate-Carrée, ou équirectangulaire**. Nous savons que pour localiser un point de la Terre il faut donner deux coordonnées, latitude et longitude, qui correspondent à deux angles idéaux mesurés depuis le centre de la Terre. Les lignes que nous voyons ici sur ce globe ce sont les parallèles et méridiens: un parallèle est une ligne de points avec latitude fixée, un méridien est une ligne de points avec une longitude fixée. La projection la plus simple, c'est d'utiliser les coordonnées géographiques comme coordonnées cartésiennes du plan. C'est à dire, nous prenons deux

axes perpendiculaires, l'axe horizontal correspond à la latitude 0 (l'équateur), l'axe vertical correspond à la longitude 0 (le méridien de Greenwich).

Cela nous donne une grille très régulière de parallèles et méridiens. Ici nous voyons que chaque carré correspond à dix degrés de latitude par dix degrés de longitude. Mais, dans la réalité, les méridiens s'approchent et convergent aux deux pôles. Alors, cette projection a déformé la réalité. De combien est-elle déformée? La déformation d'une carte est une grandeur complexe qui ne peut pas être retranscrite par une simple valeur. Néanmoins, le mathématicien et cartographe français Nicolas Auguste Tissot a inventé en 1859 une méthode graphique permettant d'afficher la déformation produite à chaque point d'une carte.

Imaginez un petit cercle autour d'un point sur la Terre. Si nous projetons ce cercle sur la carte, à cause de la déformation, il n'apparaît plus comme un cercle, mais comme une ellipse. Cette ellipse n'est pas en général un cercle, mais elle représente un cercle.

Cette ellipse est appelée **indicatrice de Tissot** de la carte, et ses propriétés (direction axiale, excentricité, aire...) sont autant d'informations sur la déformation. Par exemple, si nous dessinons l'indicatrice autour de l'équateur de cette carte, nous voyons que l'indicatrice est en fait ronde, ce qui signifie qu'il n'y a pas de déformation sur l'équateur de la carte. Si nous nous éloignons de l'équateur, nous voyons que l'ellipse devient plus longue dans la dimension horizontale. Par contre, la longueur de son axe vertical est toujours la même. Cela nous indique que dans cette carte, il n'y a pas de déformation sur la direction verticale, mais il y a une déformation sur la direction horizontale qui est autant plus grande que nous sommes loin de l'équateur. Au pôle nord et au pôle sud, la déformation est infinie.

L'indicatrice de Tissot nous permet de mesurer sur la carte malgré la déformation. Par exemple, disons que nous faisons un voyage, en bateau ou en avion, depuis la Bretagne, en France, jusqu'à Cuba. Même si nous suivons la route la plus directe, cette route n'est pas une ligne droite, car nous sommes toujours sur la surface de la Terre qui est courbée. Cette route apparaît comme cela sur cette carte.

Quelle est la longueur de cette courbe? Nous pouvons placer quelques ellipses de Tissot sur cette ligne. Comme toutes les ellipses représentent des cercles de la même taille (dans ce cas là, cercles de 1000 km de rayon), ici nous pouvons compter 1,2,... 7 rayons, donc à peu près 7000 km. Une mesure directe sur la carte avec une règle serait trompeuse, à cause de cette déformation. Pour obtenir une mesure plus précise, il faudrait utiliser des ellipses plus petites, pour approximer mieux la courbe.

En fait, à proprement parler, l'indicatrice de Tissot est le dessin d'une ellipse infinitésimale qui représente un cercle infinitesimal. Ou, plus précisément en langage mathématique, une projection est une application différentiable de la sphère dans le plan, et l'indicatrice de Tissot c'est l'image d'un cercle tangent à la sphère par l'application différentielle de la projection. Ou autrement dit, c'est une visualisation d'une métrique riemannienne. Pour ce qui nous intéresse ici, c'est notre outil de mesurer et visualiser la déformation.

## Projection de Mercator

Voyons maintenant la carte la plus utilisée au monde. C'est la carte utilisée d'habitude dans les livres et journaux, par les services en ligne comme Google maps ou par les navigateurs GPS. Mais c'est aussi la carte la plus utilisée historiquement depuis son invention en 1569 par le cartographe flamand qui lui donna nom, Gerardus Mercator. C'est la **projection de Mercator**.

Au XVIème siècle, les Européens ont commencé des grandes explorations maritimes. On a donc commencé à avoir besoin des cartes plus précises pour la navigation, et les problèmes de déformation de cartes comme la plate carrée sont apparus. Nous avons vu que dans cette carte il y a une déformation seulement horizontale, d'autant plus grande que nous sommes plus loin de l'équateur. L'idée pour créer la carte de Mercator c'est d'introduire "artificiellement" une déformation verticale de la même grandeur que celle qui est à l'horizontal. Ainsi, dans cette carte de Mercator, ces ellipses de Tissot qui représentent des cercles sont vraiment des cercles, on a gardé la forme, mais le prix payé c'est que l'on a perdu la taille. Comme la seule déformation c'est celle de la taille, pas celle de la forme, les *angles* ne sont pas distordus, car quand on fait zoom à un angle, il ne change pas. On appelle les projections avec cette propriété **conformes**.

Et pourquoi c'est tellement exceptionnel? Imaginez que vous vouliez naviguer d'une ville à l'autre à travers l'océan. Vous pouvez tracer la ligne droite reliant ces deux villes sur une carte de Mercator. Cette ligne est appelée **loxodromie**. Elle forme un angle constant avec les méridiens verticaux pointant vers le nord. Puisque les angles sont préservés, cet angle est celui que vous devriez maintenir constamment avec le nord—angle que vous pouvez obtenir à bord grâce à votre boussole ou à l'étoile polaire. Ainsi, la projection de Mercator permet de trouver un chemin entre deux points sur la Terre. Mais attention ! Cette loxodromie est seulement un chemin facile à suivre, ce n'est pas le plus court !

Ici nous pouvons comparer deux routes entre France et Cuba: l'une la plus courte, appelée **géodésique**, et l'autre la loxodromie. La route géodésique est la plus similaire à la ligne droite sur la Terre, c'est comme marcher sans tourner ni à droite ni à gauche, et si on continue indéfiniment, on fait un tour du monde. La loxodromie, si elle est étendue, elle fait des spirales autour des deux pôles.

Ainsi, cette carte a servi aux marins depuis des siècles pour naviguer. C'est aussi la projection la plus utile pour les systèmes informatiques d'aujourd'hui, qui utilisent le zoom pour s'approcher et s'éloigner: avec la carte Mercator on doit seulement ajuster le niveau de zoom sur chaque point, il n'y a pas d'autre déformation.

Pourtant, le plus grand défaut de la carte de Mercator c'est la grande déformation de la taille. En voyant cette carte, on dirait par exemple que le Groenland et l'Afrique sont à peu près de la même taille. Le sont-ils vraiment? Sur la boule du monde nous voyons déjà que non. Utilisons notre outil de l'indicatrice de Tissot pour l'explorer : prenons une indicatrice de rayon 600 km,

sur le Groenland; il nous suffit environ de deux ellipses pour le couvrir, et pour l'Afrique... environ 28. L'Afrique est à peu près 14 fois plus grande que le Groenland.

## Projection de Gall-Peters

Est ce que nous pourrions garder la taille, les aires, dans notre carte? Oui! De la même manière que pour créer la carte de Mercator nous avons rendu égales les déformations verticales et horizontales, nous pouvons les compenser pour que les ellipses soient toutes de la même aire. Nous obtenons ainsi la **carte de Gall-Peters**. Ici, les aires sont respectées, le Groenland occupe 14 fois moins que l'Afrique, et tous les pays occupent une surface proportionnelle à leur surface réelle. Le prix que nous avons payé c'est une distorsion des formes.

Cette carte a été conçue par le cartographe écossais James Gall au XIXème siècle, mais elle a gagné en popularité dans les années 60 du XXème siècle grâce au producteur de cinéma et activiste politique allemand Arno Peters, qui a promu cette carte comme plus juste et équitable envers les pays du tiers-monde, soutenant que la carte de Mercator impose une vision colonialiste du monde, car l'Europe, les États Unis, et à l'époque l'Union Soviétique, étaient considérablement surreprésentés sur la carte de Mercator.

Naturellement, la carte de Mercator est une construction mathématique sans opinion politique, mais c'est probablement vrai que nous ne devrions pas l'utiliser pour tout. Pour certains usages, il y a d'autres cartes plus appropriées.

## Projection de Mollweide

Par exemple la **projection de Mollweide**. Cette projection remplit une carte elliptique dont la largeur est le double de la hauteur. Les indicatrices de Tissot nous disent que les aires sont correctes, comme avec la projection de Gall-Peters, mais ici nous avons aussi gagné le fait que les deux pôles sont représentés comme des points, et pas comme deux bords de la carte. Cela réduit la distorsion de la forme à proximité des pôles. Maintenant les méridiens ne sont plus des lignes droites, et alors ce n'est pas une bonne carte pour naviguer, mais elle est plus appropriée pour montrer par exemple des statistiques ou des données géopolitiques des pays au niveau mondial.

## Projection de Postel (azimutale équidistante)

Nous pouvons construire les cartes depuis notre point de vue. Voici la **carte de Postel, ou azimutale équidistante**. C'est une carte circulaire pour laquelle nous nous trouvons au centre du monde (bien que cette carte puisse être centrée sur n'importe quel point à la surface de la Terre). Après avoir placé notre position au centre, nous marquons les points nous étant équidistants sur des cercles concentriques, utilisant pour rayon la distance qui nous sépare de ces points. Les points qui sont à 1000 km, sur un cercle de rayon 1, les points qui sont à 2000 km, sur un cercle de rayon 2, etcetera.

Ainsi formée, cette carte indique correctement notre distance à tout point sur la Terre (mais seulement les distances par rapport à notre position sont correctes!). Est également fidèle l'angle entre la route à suivre et le nord de la carte.

Affichée dans un aéroport, cette carte pourrait de manière très utile vous donner une bonne idée de la longueur de votre voyage et des pays que vous allez survoler. Vous pourriez également voir directement à quelles distances de votre position se trouvent différentes villes. Si nous prenons les indicatrices de Tissot, nous voyons que la déformation est symétrique par rotation, et la direction radiale n'est pas distordue.

## Projection gnomonique

La projection de cette carte est appelée **gnomonique**. Elle paraît très déformée, et si nous l'analysons avec les indicatrices de Tissot, nous confirmons cette intuition. Cependant, cette carte a une propriété unique: tous les chemins les plus courts (les géodésiques) apparaissent comme des lignes droites. Ainsi, si vous voulez faire apparaître le chemin le plus court entre deux points comme une ligne droite, vous devez déformer la carte à ce point là.

En plus, les géodésiques sont des lignes droites, mais pas "uniformes". Si nous dessinons des indicatrices sur une géodésique, nous voyons que des distances égales occupent des trajets de différente longueur sur la carte, donc on ne peut rien mesurer directement.

Vous pouvez tracer cette carte en projetant, à partir du centre de la Terre comme si c'était une source lumineuse, chaque point de la surface sur le plan tangent à votre position.

## Projection stéréographique

Cette projection est appelée **projection stéréographique**. Elle est non seulement très utile en cartographie, mais aussi dans plusieurs aires des mathématiques, et était déjà connue par les Grecs anciens.

Pour obtenir une carte par projection stéréographique, nous utilisons le même principe de projection lumineuse comme dans le cas de la projection gnomonique, sauf que dans ce cas là la source de lumière est située sur la surface de la Terre, au point antipodal du point où se trouve le plan tangent.

Si nous dessinons des ellipses de Tissot, nous remarquons que, comme sur la carte de Mercator, elles sont toutes des cercles. La projection stéréographique est donc une transformation conforme (elle ne modifie pas les angles). De plus, les cercles infinitésimaux ne sont pas les seuls à être représentés par des cercles. N'importe quel cercle sur la sphère se projette en un cercle sur le plan. La projection stéréographique est donc « très » conforme.

En particulier, tous les parallèles, méridiens, et géodésiques sont représentés par des cercles. Contrairement à la carte de Mercator, les loxodromies ne sont pas représentées par des lignes droites. Elles prennent cependant une forme particulière : si la projection est en aspect polaire (Nord ou Sud), les loxodromies sont des spirales logarithmiques, dont la distance au centre augmente exponentiellement avec l'angle de rotation.

## Projection orthographique

Cette **projection orthographique** ressemble à une représentation 3D de la Terre, mais elle est bien sûr aussi plate que toute autre carte. On l'obtient aussi par projection lumineuse comme les projections stéréographique ou gnomonique, où la source lumineuse sont ici des rayons perpendiculaires au plan de projection, en donnant une impression de perspective. Ce type de projection est très utilisé non seulement en cartographie mais aussi en informatique, jeux-vidéo, dessin industriel, photographie...

Nous pouvons revisiter toutes les idées des outils que nous avons vu (indicatrices de Tissot, géodésiques, loxodromies...) avec une nouvelle intuition spatiale. Le centre de la carte peut être n'importe quel point de la Terre, car nous pouvons orienter la sphère de la Terre en toute direction en 3D. En fait nous pouvons faire cela avec toute carte avant de projeter la Terre, pour obtenir de différents **aspects** des cartes.

Nous avons une multitude d'options pour dessiner des cartes, toutes avec des inconvénients, mais aussi avec différents avantages. C'est à nous de comprendre ce que nous voyons dans chaque carte, pour mieux comprendre ce que nous ne voyons pas dans le monde.