

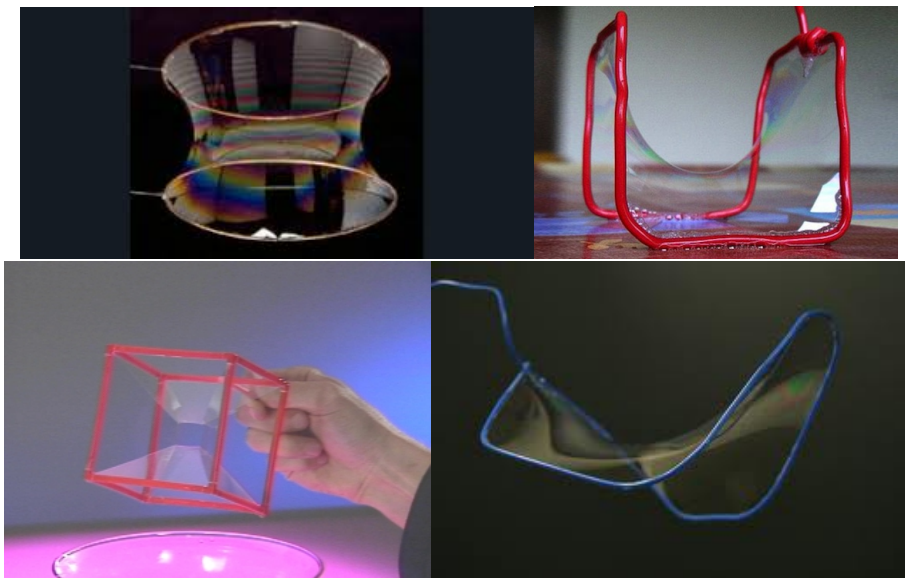
LE POINT DE STEINER D'UN TRIANGLE

Mots-clefs :

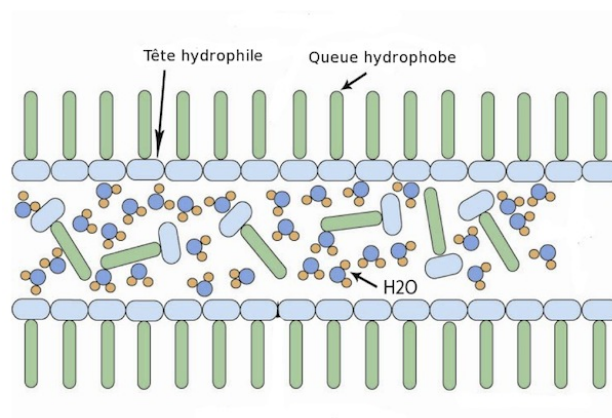
- rotation (cycle 4)
- mise en équation (2nde)
- geogebra (cycle 4)
- problème d'optimisation
- dérivée

1. CONTEXTE

Lorsqu'on trempe un contour en fil de fer dans une cuve d'eau savonneuse et qu'on le ressort, on voit le savon s'accrocher sur ce contour en formant des surfaces magnifiques. Ce sont des surfaces minimales. En voici quelques exemples :



Afin de comprendre pourquoi le savon nous régale ainsi, il faut d'abord se tourner vers la physique. Voici comment est constitué un film de savon :

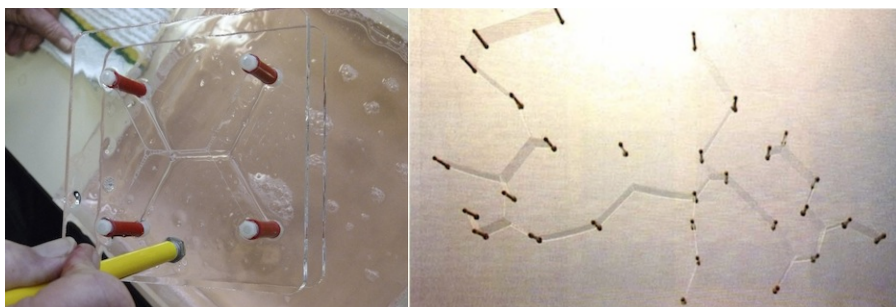


Ce film est constitué de molécules d'eau et de molécules de savon. Ces dernières contiennent une extrémité hydrophobe et une extrémité hydrophile. C'est pourquoi elles vont aller se "ranger" de sorte à avoir la partie hydrophile tournée vers les molécules

d'eau et la partie hydrophobe tournée vers l'air. Ainsi le film de savon est constitué de trois couches : une couche intérieure composée essentiellement d'eau et deux couches de molécules de savon à l'extérieur. Ce sont ces couches extérieures qui évitent l'évaporation trop rapide du film d'eau au contact de l'air. Nous parlons de films d'une épaisseur de quelques microns.

Le savon est contraint à rester accroché au contour (l'énergie nécessaire pour se décrocher est très importante). Ensuite, son énergie est essentiellement proportionnelle à l'aire de la surface du film de savon en contact avec l'air (le reste est négligeable). Ainsi, le savon va minimiser cette énergie, c'est-à-dire l'aire de la surface du film, sous la contrainte de rester accroché au contour. Et c'est cela qui donne ces jolies surfaces.

Le but est de découvrir dans le cas le plus simple quelques propriétés de ces surfaces minimales. Geste classique du mathématicien, le problème initial (des surfaces dans l'espace) étant trop compliqué, on va s'intéresser au cas des courbes dans le plan. Il y a un moyen de le faire avec du savon. Il suffit de tremper deux plaques parallèles avec des plots entre celles-ci. Le savon va s'accrocher aux plots et former des surfaces qui seront verticales. L'aire du film sera alors proportionnelle à la longueur de sa trace. Voici ce qu'on obtient sur deux exemples :



C'est ce qu'on appelle le problème des autoroutes : on se donne quelques points dans le plan (des villages) et on cherche le réseau routier de longueur minimale permettant de joindre tous les villages entre eux. Ci-dessous, nous allons étudier le cas du triangle (trois points) et donner quelques pistes dans le cas du carré.

2. PLAN D'ACTIVITÉS

Les premières questions sont peut-être abordables en cycle 4 (tant qu'on ne cherche pas des preuves). Puis le niveau augmente progressivement. Les dernières sont destinées à des lycéens scientifiques, voire plus.

2.1. Heuristique sur le point de Steiner. On se donne trois points dans le plan : A , B et C . On cherche un point M dans le plan tel que la somme des longueurs $MA + MB + MC$ soit la plus petite possible. On cherche donc M dans le plan de sorte que

$$MA + MB + MC \leq PA + PB + PC \text{ pour tout point } P \text{ du plan.}$$

1. Essayez sur geogebra de trouver ce point M en plaçant trois points A , B , C et en déplaçant le point M . Il faut afficher la somme des longueurs $MA + MB + MC$ et essayer de trouver l'endroit où cette somme est la plus petite. Un travail collaboratif devrait permettre d'émettre une conjecture sur la position optimale de ce point M à partir de plusieurs exemples.

Réponse : voici un fichier permettant de le faire. Les élèves peuvent à force d'essais et d'erreurs se rendre compte que le point M optimal semble être tel que les trois angles $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{AMB}$ sont tous égaux à 120 degrés. Même si ce n'est pas évident d'aller chercher ce point M

exactement à la main. Si le triangle ABC est trop plat, le point M optimal semble être le sommet du triangle dont l'angle est grand. En continuant à jouer et à faire des essais, on peut arriver à la conjecture suivante :

Conjecture : le point M est un point tel que les trois angles $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{AMB}$ sont tous égaux à 120 degrés si le triangle ABC n'a aucun angle supérieur à 120 degrés. Si le triangle ABC a un angle en A (ou en B ou en C) supérieur à 120 degrés, le point M est en A (ou en B ou en C).

2.2. Construire le point de Steiner. Prenons deux points A et B dans le plan. Essayons déjà de construire un point M tel que l'angle $\widehat{AMB}$ soit égal à 120 degrés.

2. A l'aide de geogebra, trouvez plusieurs points qui conviennent. Posez deux points A et B et essayez, à la main, de trouver plusieurs emplacements pour le point M de sorte que l'angle $\widehat{AMB}$ soit égal à 120 degrés. Prenez tous ceux qui se trouvent du même côté de la droite (AB) . Pouvez-vous imaginer une figure géométrique sur laquelle tous ces points se trouvent ?

Réponse : tous les points M tels que $\widehat{AMB}$ soit égal à 120 degrés sont sur un cercle passant par A et B . On peut même demander à geogebra de le tracer approximativement une fois qu'on a trouvé un point M qui convient, cf. ce fichier . Et vérifier ensuite que ça fonctionne, c'est-à-dire que tous les points sur un arc de cercle d'extrémités A et B sont tels que l'angle avec lequel on voit A et B est constant. C'est le théorème de l'angle au centre (voir ici par exemple). Si les élèves connaissent ce résultat, parfait ! Sinon, on l'admet ou on le démontre ! La preuve n'est pas compliquée et se trouve ici.

3. Comment construire cette portion de cercle, lieu des points M tels que $\widehat{AMB}$ soit égal à 120 degrés ? Indice : regardez ce qu'il se passe pour les points qui sont sur l'autre portion de cercle.

Réponse : les points P sur l'autre portion de cercle sont tels que l'angle $\widehat{APB}$ est égal à 60 degrés. Soit on le remarque grâce à geogebra, soit (et ce n'est pas exclusif) on le démontre. Il faut donc tracer un point P tel que l'angle $\widehat{APB}$ soit égal à 60 degrés (il suffit de tracer un triangle équilatéral), puis de tracer le cercle passant par les trois points A , P et B . A la règle et au compas, ou avec geogebra (voir ici pour une animation montrant cette construction).

4. Etant donnés trois points A , B et C , déduire des questions précédentes une construction d'un point M tel que les trois angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMC}$ et $\widehat{BMC}$ soient égaux à 120 degrés. Cette construction fonctionne-t-elle tout le temps ? D'ailleurs, sauriez-vous démontrer qu'elle fonctionne (et dans quels cas) ?

Réponse : il suffit de tracer les portions de cercle de la question précédente pour les trois segments. Leur intersection donnera le point voulu. Pourquoi ces trois cercles s'intersectent-ils ? Parce que, dès que deux d'entre eux s'intersectent, les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AMC}$ étant de 120 degrés, le troisième angle $\widehat{BMC}$ est également de 120 degrés et se trouve donc sur le troisième arc de cercle. Voir le fichier ici pour une animation montrant cette construction. La construction ne fonctionne plus dès qu'un des angles du triangle est supérieur à 120 degrés : si c'est l'angle en A , par exemple, l'ensemble des points P tels que $\widehat{BPC}$ soit égal à 120 degrés se trouve à l'extérieur du triangle (vous pouvez jouer avec les points A , B et C dans le fichier précédent pour voir ce que devient la construction dans ce cas). La preuve en découle.

5. Question bonus : soit ABC un triangle dont tous les angles sont inférieurs à 120 degrés. Tracer les triangles équilatéraux (extérieurs au triangle) ABC' , ACB' et BCA' . Montrer que les trois droites (AA') , (BB') et (CC') s'intersectent en le point de Steiner du triangle (les trois angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMC}$ et $\widehat{BMC}$ sont égaux à 120 degrés).

Réponse : voir une preuve dans ce fichier.

2.3. Pourquoi le point de Steiner est-il celui qui minimise $AM + BM + CM$?
Soit un triangle ABC dont tous les angles sont inférieurs à 120 degrés. L'objectif est de montrer que le point de Steiner du triangle, M , est tel que

$$AM + BM + CM \leq AP + BP + CP$$

pour tous les points P du plan. Nous pouvons en proposer plusieurs preuves¹.

6. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont inférieurs à 120 degrés. Soit P un point du plan. On note P' l'image de P par la rotation de centre A et d'angle 60 degrés. On note C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle 60 degrés.

a) Montrez que $PP' = AP$ et que $P'C' = PC$.

b) En déduire que

$$PA + PB + PC = BP + PP' + P'C'.$$

c) En déduire ensuite que

$$PA + PB + PC \geq BC'$$

avec égalité si et seulement si les quatre points B, P, P' et C' sont alignés.

d) Montrez que les quatre points B, P, P' et C' sont alignés si et seulement si P est le point de Steiner du triangle ABC . Conclure.

Réponses : toutes les réponses se trouvent dans ce fichier. Comme toutes les preuves géométriques, on ne peut qu'être d'accord une fois qu'on l'a sous les yeux, la trouver est une autre histoire. Malgré tout, on retrouve un ingrédient classique de minimisation de somme de longueurs par alignement de points.

7*. Soient A, B, C trois points du plan (distincts et non alignés). Imaginons qu'un point M soit tel que

$$AM + BM + CM \leq AP + BP + CP$$

pour tout point P du plan.

a) Supposons que M n'est pas un des points A, B, C . Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire. Soit M_t le translaté du point M par le vecteur $t\vec{u}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On pose

$$f(t) = AM_t + BM_t + CM_t.$$

Utilisez le fait que f est minimale en $t = 0$ pour montrer que le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} + \frac{\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BM}|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CM}|}$$

est orthogonal à $\vec{u}$.

Réponse : Considérons tout d'abord la fonction $g(t) = AM_t = |\overrightarrow{AM_t}|$. On a

$$|\overrightarrow{AM_t}|^2 = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_t}|^2 = |\overrightarrow{AM} + t\vec{u}|^2 = |\overrightarrow{AM}|^2 + 2t\langle\vec{u}, \overrightarrow{AM}\rangle + t^2$$

1. la première est "miraculeuse" et géométrique (compréhensible - mais introuvable - en collège), la seconde utilise une étude de fonction (voire les nombres complexes si on veut) et peut être abordée en Terminale S. Il en existe également une utilisant les ellipses et cette propriété que le lieu des points tels que $MA + MB = C$ est une ellipse de foyer A et B .

puisque $\vec{u}$ est unitaire. Donc

$$g(t) = \sqrt{|\vec{AM}|^2 + 2t\langle\vec{u}, \vec{AM}\rangle + t^2}.$$

Cette fonction est dérivable tant que le terme dans la racine carrée ne s'annule pas, c'est-à-dire tant que le point M_t n'est pas en A . C'est bien sûr le cas sur un petit intervalle contenant 0 puisque M n'est pas en A . Sa dérivée est alors

$$g'(t) = \frac{1}{2} \frac{2\langle\vec{u}, \vec{AM}\rangle + 2t}{\sqrt{|\vec{AM}|^2 + 2t\langle\vec{u}, \vec{AM}\rangle + t^2}} = \frac{\langle\vec{u}, \vec{AM} + t\vec{u}\rangle}{\sqrt{|\vec{AM}|^2 + 2t\langle\vec{u}, \vec{AM}\rangle + t^2}}$$

en utilisant la dérivée d'une fonction composée et le fait que $\vec{u}$ est unitaire. En particulier,

$$g'(0) = \frac{\langle\vec{AM}, \vec{u}\rangle}{|\vec{AM}|}.$$

Répétant l'opération pour les trois points A , B et C , on obtient

$$f'(0) = \langle\vec{u}, \frac{\vec{AM}}{|\vec{AM}|} + \frac{\vec{BM}}{|\vec{BM}|} + \frac{\vec{CM}}{|\vec{CM}|}\rangle.$$

La fonction f étant minimale en $t = 0$ par hypothèse, étant dérivable sur un petit intervalle autour de 0, elle vérifie $f'(0) = 0$. CQFD.

b) Faites une étude similaire si $M = A$ (ou B ou C).

Réponse : c'est un petit peu plus délicat car la fonction f n'est pas dérivable en A . Mais on peut écrire que, pour $t > 0$,

$$f(t) = t + BM_t + CM_t$$

Si $f(t) \geq f(0)$, cela signifie

$$t + BM_t + CM_t \geq BM_0 + CM_0 = AB + AC.$$

En particulier

$$\frac{BM_t - BM_0}{t} + \frac{CM_t - CM_0}{t} + 1 \geq 0$$

pour tout $t > 0$. En passant à la limite quand $t \rightarrow 0^+$ et en remarquant que $t \mapsto BM_t$ et $t \mapsto CM_t$ sont dérivables en 0 (cf. question précédente), on obtient

$$\langle\vec{u}, \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} + \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}\rangle + 1 \geq 0.$$

On peut faire la même étude pour $t < 0$ pour obtenir

$$\langle\vec{u}, \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} + \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}\rangle - 1 \geq 0.$$

Ainsi, si $M = A$, cela ne peut être un minimum de f que si

$$-1 \leq \langle\vec{u}, \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} + \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}\rangle \leq 1.$$

c) En déduire qu'un point M vérifiant que

$$MA + MB + MC \leq PA + PB + PC$$

pour tout point P du plan, s'il existe, est soit en A , B ou C (si un des angles du triangle est supérieur à 120 degrés), soit le point de Steiner de ce triangle.

Réponse : si M n'est pas en A , B ou C , on doit donc avoir d'après la question a)

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} + \frac{\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BM}|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CM}|}$$

orthogonal à $\vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}$ unitaire. Donc

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} + \frac{\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BM}|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CM}|} = 0.$$

Une telle somme de vecteurs unitaires ne peut être nulle que s'ils forment des angles de 120 degrés.

Si $M = A$, on doit avoir

$$-1 \leq \left\langle \vec{u}, \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right\rangle \leq 1$$

pour tout vecteur $\vec{u}$ unitaire. Ou encore

$$-|\vec{v}| \leq \left\langle \vec{v}, \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right\rangle \leq |\vec{v}|$$

pour tout vecteur $\vec{v}$. En choisissant

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|},$$

cela donne

$$\left| \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right| \leq 1,$$

ou encore

$$1 \geq \left| \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right|^2 = 2 + 2 \left\langle \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}, \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right\rangle,$$

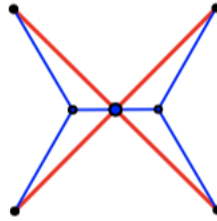
ce qui donne

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}, \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right\rangle \geq -\frac{1}{2}.$$

Cela ne signifie rien d'autre que le fait que l'angle en A doit être plus grand que 120 degrés.

Remarque importante : dans toute cette étude de la question 7, nous avons supposé que le point M optimal existe. Ce n'est pas évident. Il faut ici utiliser par exemple le fait que la fonction $M \mapsto AM + BM + CM$ est continue et tend vers $+\infty$ à l'infini et utiliser que toute fonction continue sur un compact atteint son minimum, ce qui ne peut être fait avant la licence...

2.4. Et pour le carré ? La solution pour le carré n'est pas aisée à trouver. La chose que l'on peut démontrer simplement est que la solution n'est pas donnée par les deux diagonales. En effet, si c'était le cas, nous pourrions diminuer la longueur des routes en remplaçant la longueur de deux demi-diagonales (joignant A , B et O le centre du carré) par la configuration obtenue pour le triangle dans l'étude précédente :



Sur ce dessin, d'après l'étude précédente, la longueur en bleu est nécessairement plus petite que la longueur en rouge. La solution pour le carré passe par les étapes suivantes :

- montrer qu'il n'y a que deux intersections de route au maximum M et N .
- montrer que les angles en ces intersections sont de 120 degrés (cf. étude précédente).
- Montrer qu'il n'y a qu'une configuration possible, celle en bleu ci-dessus.
- Montrer que, comme la solution existe (à démontrer), c'est forcément celle en bleu sur le dessin.

Cette étude nous mènerait trop loin, la question 7 étant déjà largement hors-programme.

3. UN TOUT PETIT PEU D'HISTOIRE

L'étude des films de savon s'accrochant sur un contour en fil de fer a été initiée par le physicien belge Joseph Plateau (1801-1883). A la suite d'observations, il a conjecturé que les surfaces ne se rejoignent que 3 par 3 le long d'arêtes en formant des angles de 120 degrés (regardez le cube par exemple dans les photos du début). Ensuite ces arêtes ne doivent se rencontrer que 4 par 4 en formant un angle de 109,28 degrés (l'angle au centre du tétraèdre). Ces deux conjectures n'ont été démontrées qu'en 1976 par Jean Taylor, mathématicienne américaine (1944-). Ce que nous venons de montrer dans le cas du triangle est cette loi de Plateau (mais dans le cas des courbes, beaucoup plus simple).

Jakob Steiner (1796-1863) était un mathématicien suisse. Il a laissé son nom à ce point particulier du triangle car il s'intéressait à ce problème des autoroutes, la solution pour trois points étant celle impliquant le point de Steiner, comme vu dans cette activité. Ce point de Steiner est aussi appelé point de Fermat ou point de Torricelli (cela dépendant de l'origine géographique de celui ou celle qui parle).

4. RESSOURCES - POUR ALLER PLUS LOIN

- *Mathématiques savonneuses*, un article de Paul Laurain dans *Images des Mathématiques* parlant de surfaces minimales, de savon, et de problème des autoroutes.
- *The science of soap films and soap bubbles* est un excellent livre de Cyril Isenberg sur les films de savon : pour aller beaucoup plus loin.
- Un site d'images de surfaces minimales, juste pour le plaisir des yeux.

Tous les fichiers sources (photos, tex, geogebra) sont disponibles ici. Pour tous commentaires, remarques, suggestions, améliorations, un contact : druet@math.univ-lyon1.fr